Härledning av Levi-Civita-förbindelsen

Ifrån antagande om ekvivalens mellan raka och stationära kurvor

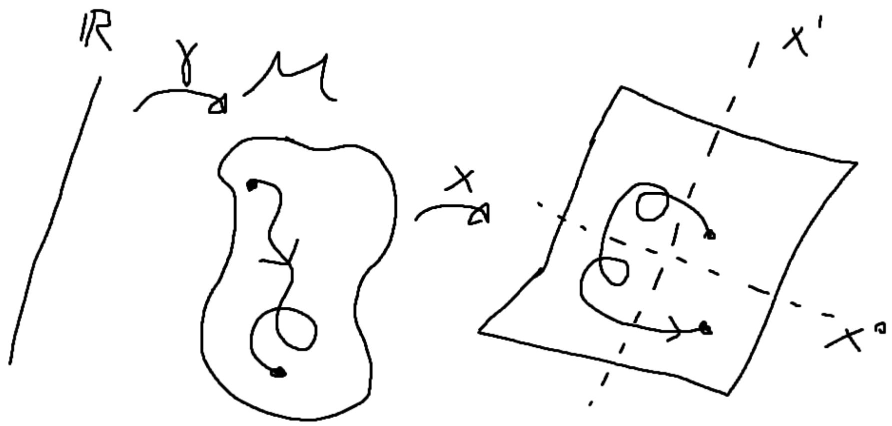
Anders

7 oktober 2023

Sammanfattning

Häri härleds Levi-Civita-förbindelsen utifrån antaganden om torsionsfrihet och ekvivalens mellan stationära kurvor och raka kurvor.

Innehåll



Figur 0: Någon tuff kurva, γ, som avbildar någon reell parameter på mångfalden och sedan kartans avbildning på $\mathbb{R}^d$.

0 Förberedelser

0.0 Kurvor på mångfalder

Låt oss till början anta en mångfald, M, med någon topologi och en atlas som är minst C^1. En kurva, γ, är en funktion

$$\gamma : \mathbb{R} \to M \tag{0}$$
$$\lambda \mapsto \gamma(\lambda) \tag{1}$$

Där definitionsmängden ofta begränsas till ett ändligt och sammanhängande intervall, typiskt $\lambda \in [0, 1]$.

Givet en karta, (U, x) (U en öppen mängd i M och x en funktion $M \to \mathbb{R}^d$ där $d = \dim(M)$), kan vi skriva kartan i dess komponenter

$$x \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d \tag{2}$$
$$\lambda \mapsto (\gamma^0, \gamma^1, \ldots, \gamma^{d-1}) \tag{3}$$

Genom att betrakta dessa funktioner kan vi avgöra kurvans egenskaper med avseende på kontinuitet, deriverbarhet &sv. Vi kommer anta att kurvan är deriverbar med kontinuerlig derivata, alltså av klass $C^1(M)$.

0.1 Variation av kurvor

På mångfalden är inte addition definierat och det ställer till problemata för oss. Vi önskar definiera ett uttryck i stil med $\delta = \gamma$" + "φ, där γ, δ och φ alla är kurvor på M som är definierade på intervallet $[0,1]$. En naiv definition hade varit att definiera additionen punktvis, men det är hopplöst direkt på mångfalden. Vi tvingas i stället att definiera summan av kurvor givet en karta[†]

$$\delta = \gamma +_x \varphi : \mathbb{R} \to M \tag{4}$$

$$\lambda \mapsto x^{-1}[(x \circ \gamma) +_{\mathbb{R}^d} (x \circ \varphi)] \tag{5}$$

Där vi för tydlighetens skull noterat att additionen är kartberoende[♯] och den andra additionen är den vanliga komponentvisa additionen i $\mathbb{R}^d$.

Vi kommer så småningom inse att denna definition är användbar så länge den är väldefinierad, alltså när vi använder den ska den inte bero på vilken karta vi väljer att använda.

Slutligen för att variera en kurva vill vi ha ett uttryck på formen $\delta = \gamma$"+"ε"$\cdot$"φ, där $\varepsilon > 0$ är någon reell parameter. Vi inser ju att vi inte har något sätt att definiera multiplikation mellan ett reellt tal och en kurva så vi får återigen gå ned i en karta och definiera enligt:

$$\delta = \gamma +_x \varepsilon \cdot_x \varphi : \mathbb{R} \to M \tag{6}$$

$$\lambda \mapsto x^{-1}[(x \circ \gamma) +_{\mathbb{R}^d} (\varepsilon \cdot_{\mathbb{R}^d} x \circ \varphi)] \tag{7}$$

Där den första multiplikationen är kartberoende och den andra är den välkända S-multiplikationen på $\mathbb{R}^d$.

För att nu definiera en variation med försvinnande randvillkor, alltså att $\delta(0) = \gamma(0)$ och $\delta(1) = \gamma(1)$ så vill vi ha att $x \circ \varphi$ ska avbildas på origo i $\mathbb{R}^d$ för intervallets ändpunkter. Låt oss säga att punkten $\omega \in M$ är just den unika punkt sådan att $x(\omega) = 0_{\mathbb{R}^d}$. Då kräver vi att φ är en slinga med utgångspunkt ω.

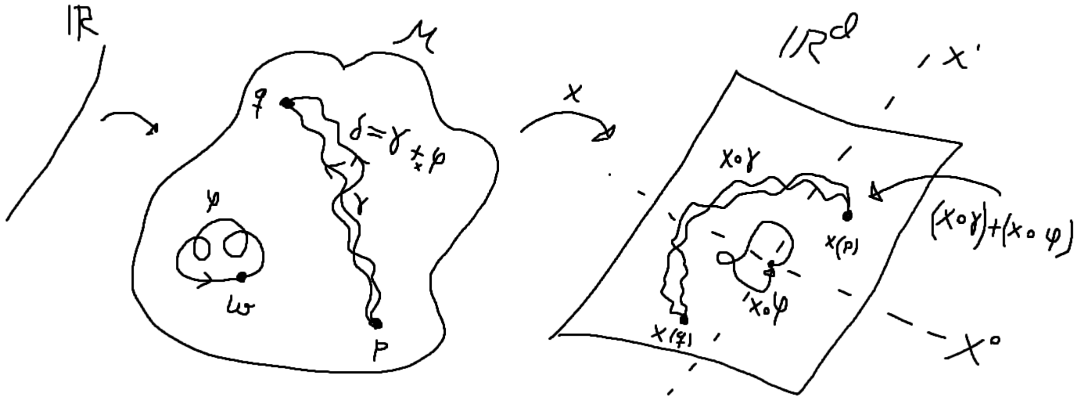
Vi har nu ett sätt att kontinuerligt variera kurvor på och det kommer vi straxt få användning för.

0.2 Raka kurvor

En kurva

[†] För enkelhetens skull tänker vi oss hädanefter en karta, men det går såklart bra med flera överlappande kartor. Notationen kladdas emellertid ned då eftersom vi får beakta överföringsfunktionerna mellan kartorna.

[♯] Varningsklocka: DING!! DING!!



Figur 1: Definition av addition av kurvor på en mångfald givet en karta.

$$\gamma : \mathbb{R} \to M \tag{8}$$

som löper med någon parameter längs en mångfald, M, kallas för *rak* om den uppfyller villkoret (den *geodetiska ekvationen*)

$$\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = 0 \tag{9}$$

Med andra ord så ska kurvans hastighet deriverat med avseende på kurvans hastighet vara noll. Nu unför vi en karta,

$$x : M \to \mathbb{R}^d \tag{10}$$

där d är mångfaldens dimension. Vi inför beteckningen

$$\gamma^\mu = (x \circ \gamma)^\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d \tag{11}$$

Med denna notation kan vi skriva hastighetens komponenter som

$$(x \circ v_\gamma)^\mu = \frac{d}{d\lambda}(x \circ \gamma(\lambda))^\mu \tag{12}$$

$$= \dot{\gamma}^\mu \tag{13}$$

Vi undersöker nu hur en geodet ser ut i vår karta:

$$\nabla_{\dot{\gamma}^\mu \partial_\mu}(\dot{\gamma}^\nu \partial_\nu) = \dot{\gamma}^\mu \nabla_\mu(\dot{\gamma}^\nu \partial_\nu) \tag{14}$$
$$= \dot{\gamma}^\mu(\partial_\mu \dot{\gamma}^\nu)\partial_\nu + \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu \nabla_\mu \partial_\mu \tag{15}$$
$$= \ddot{\gamma}^\rho \partial_\rho + \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu} \partial_\rho \tag{16}$$
$$= 0 \tag{17}$$

Så för komponenterna gäller $\ddot{\gamma}^\rho + \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0$.

0.3 Stationära kurvor

En kurva, γ, är *stationär*, om den uppfyller villkoret

$$\delta S = 0 \tag{18}$$

Där S är kurvans längd. För en metrik,

$$\mathcal{G} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} \tag{19}$$

så har vi kurvans längd

$$S = \int d\lambda \sqrt{\mathcal{G}(v_\gamma, v_\gamma)} \tag{20}$$

där λ är kurvparametern[†]. Vi inför ifrån denna metrik en motsvarande g, som är punktvis definierad på $\mathbb{R}^d$ enligt vår karta. Om inget annat anges så syftar punkten på $x \circ \gamma(\lambda)$. Då kan vi skriva kurvlängden i komponenter

$$S = \int d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu} \tag{21}$$

1 Levi-Civita-förbindelsen

Nu är det dags. Vi börjar med att variera en kurva som är parametriserad på intervallet $[0, 1]$

[†]Notera för GUds skull att $\mathcal{G}$ är definierat punktvis på M så den kommer variera längs kurvan.

$$\gamma^\mu \to \gamma^\mu + \varepsilon\varphi^\mu \tag{22}$$

Där ε är någon liten, positiv, parameter och $\varphi^\mu(0) = \varphi^\mu(1) = 0$, ändpunkterna är alltså fästa. Vi får på samma sätt en variation i hastigheterna

$$\dot\gamma^\mu \to \dot\gamma^\mu + \varepsilon\dot\varphi^\mu \tag{23}$$

Och i metriken

$$g_{\mu\nu}(\gamma^\mu) \to g_{\mu_\nu}(\gamma^\mu + \varepsilon\varphi^\mu) \tag{24}$$

Låt oss sätta in detta i vårt uttryck för kurvlängden

$$S = \int_0^1 d\lambda \sqrt{g_{\mu_\nu}(\gamma^\alpha + \varepsilon\varphi^\alpha)(\dot\gamma^\mu + \varepsilon\dot\varphi^\mu)(\dot\gamma^\nu + \varepsilon\dot\varphi^\nu)} \tag{25}$$

Vi utvecklar metriken i första ordningen, $g_{\mu_\nu}(\gamma^\alpha + \varepsilon\varphi^\alpha) \to g_{\mu\nu} + \varepsilon\varphi^\alpha\partial_\alpha g_{\mu\nu}$, och kastar övriga termer med motiveringen att endast termer linjära i ε kommer överleva att derivera med avseende på ε och sen låta ε gå mot 0.

Vi samlar alltså termer som är linjära i ε och slänger resten och får

$$S = \int_0^1 d\lambda \sqrt{\varepsilon[g_{\mu\nu}\dot\varphi^\mu\dot\gamma^\nu + g_{\mu\nu}\dot\gamma^\mu\dot\varphi^\nu + \varphi^\alpha\dot\gamma^\mu\dot\gamma^\nu\partial_\alpha g_{\mu\nu}]} \tag{26}$$

Derivering med avseende på ε och låta $\varepsilon \to 0$, innebär att vi får en kvot i integranden enligt

$$\delta S = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{g_{\mu\nu}\dot\gamma^\mu\dot\gamma^\nu}}[g_{\mu\nu}\dot\varphi^\mu\dot\gamma^\nu + g_{\mu\nu}\dot\gamma^\mu\dot\varphi^\nu + \varphi^\alpha\dot\gamma^\mu\dot\gamma^\nu\partial_\alpha g_{\mu\nu}] \tag{27}$$

Utan att byta notation† väljer vi här att parametrisera om kurvan så att nämnaren är konstant 1. Notera att vi inte behöver en affin parameter utan bara en monoton parameter♯.

†Mer explicit definierar vi en ny funktion, λ, som vi råkar beteckna med samma symbol som vår tidigare parameter och betraktar denna som vår nya parameter.

♯Andra argument kan användas, se exempelvis Rindler eller Weinberg

$$\delta S = \int_0^1 d\lambda g_{\mu\nu}\dot{\varphi}^\mu\dot{\gamma}^\nu + g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\mu\dot{\varphi}^\nu + \varphi^\alpha\dot{\gamma}^\mu\dot{\gamma}^\nu\partial_\alpha g_{\mu\nu} \tag{28}$$

Nu kör vi partiell integration på de första två termerna

$$\int_0^1 d\lambda g_{\mu\nu}\dot{\varphi}^\mu\dot{\gamma}^\nu \tag{29}$$

$$= [(g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\nu)\varphi^\mu]_0^1 - \int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda}(g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\nu)\varphi^\mu \tag{30}$$

Där vi inser att första termen i sista högerledet är noll på grund av randvillkoren på φ. Derivatan med avseende på λ räknas ut enligt†

$$\frac{d}{d\lambda}(g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\nu) = \dot{\gamma}^\kappa\dot{\gamma}^\nu\partial_\kappa g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\ddot{\gamma}^\nu \tag{31}$$

Vi sätter in detta i vår kurvlängd och får integranden

$$\varphi^\alpha\dot{\gamma}^\mu\dot{\gamma}^\nu\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \dot{\gamma}^\kappa\dot{\gamma}^\nu\varphi^\mu\partial_\kappa g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\ddot{\gamma}^\nu\varphi^\mu - \dot{\gamma}^\kappa\dot{\gamma}^\mu\varphi^\nu\partial_\kappa g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\ddot{\gamma}^\mu\varphi^\nu \tag{32}$$

Genom att byta namn på indices som summeras över (kan ju inte göra skada) så kan vi skriva om till

[i första termen ändrar vi inga indices, i andra termen kör vi först $\mu \to \alpha$ sen $\kappa \to \mu$, i tredje kör vi $\nu \to \lambda$ och $\mu \to \alpha$, i fjärde kör vi $\nu \to \alpha$ och $\kappa \to \nu$ och i den femte kör vi slutligen $\mu \to \lambda$ och $\nu \to \alpha$]

$$\varphi^\alpha\dot{\gamma}^\mu\dot{\gamma}^\nu\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \dot{\gamma}^\mu\dot{\gamma}^\mu\varphi^\alpha\partial_\mu g_{\alpha\nu} - \dot{\gamma}^\nu\dot{\gamma}^\mu\varphi^\alpha\partial_\nu g_{\mu\alpha} - 2g_{\alpha\lambda}\ddot{\gamma}^\lambda\varphi^\alpha \tag{33}$$

Nu dividerar vi allt med $\dot{\gamma}^\nu\dot{\gamma}^\mu\varphi^{\alpha\sharp}$ och får

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\mu\alpha} - 2g_{\alpha\lambda}\frac{\ddot{\gamma}^\lambda}{\dot{\gamma}^\mu\dot{\gamma}^\nu} \tag{34}$$

†Var uppmärksam här med inre derivator och minns att g är en funktion längs γ

$^\sharp$Notera att detta är väldefinierat ty denna produkt ej kan vara 0 utom i de punkter där $x \circ \varphi$ är 0 och där är ändå villkoret alltid uppfyllt, och därtill att det inte ändrar villkoret $\delta S = 0$.

Vi noterar att vi inte längre är beroende av variationen. Om integranden är 0 så måste kurvan vara stationär. Här utnyttjar vi den geodetiska ekvationen

$$\ddot{\gamma}^\rho + \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0 \tag{35}$$

$$\iff \tag{36}$$

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = -\frac{\ddot{\gamma}^\rho}{\dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu} \tag{37}$$

Insatt i vårt uttryck har vi alltså

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\mu\alpha} + 2 g_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \tag{38}$$

För att detta ska vara 0 överallt så har vi alltså villkoret

$$-2 g_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\mu\alpha} \tag{39}$$

Verka med minus en halv gånger inversen av metriken

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (g^{-1})^{\lambda\alpha} [\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\mu\alpha}] \tag{40}$$

Vilket ger vårt sökta uttryck för Levi-Civita-förbindelsens *förbindelsekoefficienter*.